1.5. Değişken Katsayılı Lineer Diferansiyel Denklemler

$a_0(x) \neq 0$ olmak üzere

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = b(x)$$

formundaki denklemlere n. mertebeden değişken katsayılı lineer diferansiyel denklem dendiğini ilk bölümlerde ifade etmiştik. Yine bu denklemin $p_i(x)$ katsayılarına bağlı olarak operatör formda

$$L(D) = L = \frac{d^n}{dx^n} + p_1(x)\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} + \dots + p_{n-1}(x)\frac{d}{dx} + p_n(x)$$

olmak üzere

$$L(D)y = Ly) = B(x)$$

olarak yazılabileceğini de belirtmiştik.

Değişken katsayılı denklemlerin çözümü için genel yöntemler yoktur. Ancak bazı özel hallere uygulanabilecek özel yöntemler vardır. Bunlardan bazıları;

1) Mertebe düşürme yöntemi

2) Parametrelerin değişimi yöntemi

3) Sabit katsayılı hale indirgeme yöntemleri

şeklindedir

1.5.1. Mertebe Düşürme Yöntemi

Bu yöntem hem sabit hem de değişken katsayılı denklemlere uygulanabilir. Çözüm için $Ly=0$ homojen kısmın bir (özel) çözümünün bilinmesi gerekir.

Teorem 17: $p_i(x)$, $B(x)$ bir I açık aralığında sürekli olsun. Eğer $Ly=0$ homojen lineer denkleminin lineer bağımsız k özel çözümü bilinirse, $Ly=B(x)$ denkleminin mertebesi k kadar düşürülebilir.

Bu yöntem üçüncü ve daha yüksek mertebeden denklemler için pek kullanışlı değildir. Fakat ikinci mertebeden denkleme bu yöntem uygulandığında denklem birinci mertebeye düşeceği için bilinen yöntemler ile çözüm kolayca bulunabilir.

Not 1) $Ly=0$ da y nin katsayısı sıfır ise ($P_n(x)=0$ ise) $y=1$ denklemin bir çözümüdür.

2) $Ly=0$ da y nin en düşük türevi α. mertebeden ise $y=x^{\alpha-1}$, $\alpha>0$ fonksiyonu denklemin bir çözümüdür.

3) $Ly=0$ da y nin ve türevlerinin katsayıları toplamı sıfır ise $y=e^x$ fonksiyonu bir çözümdür.

4) $Ly=0$ da y nin tek mertebeden türevlerinin katsayıları toplamı ile y nin çift mertebeden türevlerinin katsayıları toplamı farkı sıfır ise $y=e^{-x}$ fonksiyonu bir çözümdür.

5) Bir r sabiti için $r^n+P_1(x)r^{n-1}+\dots+P_{n-1}(x)r+P_n(x)=0$ ise $y=e^{rx}$ fonksiyonu bir çözümdür.

6) $Ly=0$ denklemi y bağımlı değişkenini veya y ile beraber küçük mertebeli bazı ardışık türevlerini içermezse yani denklem

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_k(x)y^{(k)} = b(x)$$

şeklinde ise $y = x^{k-1}$ homojen kısmın çözümüdür ve $y^{(k)} = u$ dönüşümü ile u bağımlı değişkenli $(n-k)$ mertebeli denkleme indirgenip çözülebilir.

Özel olarak $k=n$ ise yani $y^{(n)} = \dfrac{b(x)}{a_n(x)}$ ise genel çözüm n defa ardışık integral alınarak bulunur.

Örnek: $xy'' + 2(1-x)y' + (x-2)y = 2e^x$ denkleminin çözümünü bulunuz.

$x + 2(1-x) + x - 2 = 0$ olduğundan Not 3'e göre $y = e^x$,

$xy'' + 2(1-x)y' + (x-2)y = 0$ denkleminin bir çözümüdür.

Bu çözüm yardımıyla denklemin mertebesi düşürülebilir.

$y = e^x . u$, $u = u(x)$

değişken değişimi yapalım.

$y' = e^x u + e^x u'$, $y'' = e^x u + 2e^x u' + e^x u''$ için

$x(e^x u + 2e^x u' + e^x u'') + 2(1-x)\{e^x u + e^x u'\} + (x-2)\{e^x u\} = 2e^x$

$\Rightarrow \cancel{e^x}\{xu'' + (\cancel{2x} + 2 - \cancel{2x})u' + (x + \cancel{2} - 2x + x - \cancel{2})u\} = 2\cancel{e^x}$

$\Rightarrow xu'' + 2u' = 2$ denklemi elde edilir.

$u' = v$ dersek $u'' = v'$ olup

$xv' + 2v = 2 \Rightarrow v' + \frac{2}{x}v = \frac{2}{x}$ şeklinde birinci

mertebeden lineer diferansiyel denklem elde edilir. Bunun genel

Çözümü $\lambda(x) = e^{\int \frac{2}{x} dx} = e^{2\ln x} = x^2$ olmak üzere

$$v \cdot x^2 = \int \frac{2}{x} \cdot x^2 dx + c_1 \Rightarrow v x^2 = x^2 + c_1 \Rightarrow v = 1 + \frac{c_1}{x^2} \text{ olur.}$$

$u' = v$ olduğundan $u' = 1 + \frac{c_1}{x^2} \Rightarrow u = \int \left(1 + \frac{c_1}{x^2}\right) dx$

$\Rightarrow u = x - \frac{c_1}{x} + c_2$ bulunur.

$y = e^x u$ olduğundan denklemin genel çözümü

$$y = e^x \left(x - \frac{c_1}{x} + c_2 \right)$$

$y = -\frac{e^x}{x} c_1 + e^x c_2 + x e^x$ şeklinde bulunur.

Örnek: $\sin^2 x \cdot y'' = 1$ denkleminin çözümünü bulunuz

Denklemde y ve y' olmadığından

$y'' = \dfrac{1}{\sin^2 x}$ yazılırsa iki kez integral alınarak

$$y' = \int \frac{1}{\sin^2 x}\,dx + c_1 \Rightarrow y' = -\cot x + c_1$$

$$\Rightarrow y = \int (-\cot x + c_1)\,dx + c_2$$

$$\Rightarrow y = \underbrace{-\ln(\sin x)}_{y_ö} + \underbrace{c_1 x + c_2}_{y_h}$$

şeklinde genel çözüm bulunur.

Örnek: $xy'' + (x-1)y' = e^{-x}$ denkleminin çözümünü bulunuz.

Denklemde y bulunmadığından

$y' = u$ dersek $y'' = u'$ olacağından denklem

$$xu' + (x-1)u = e^{-x} \Rightarrow u' + \frac{x-1}{x}u = \frac{e^{-x}}{x}$$

birinci mertebeden lineer denklemine indirgenir. Bunun çözümü

$$\lambda(x) = e^{\int \frac{x-1}{x} dx} = e^{x - \ln x} = \frac{e^x}{x}$$ olmak üzere

$$u \cdot \frac{e^x}{x} = \int \frac{e^{-x}}{x} \cdot \frac{e^x}{x} dx + c_1 \Rightarrow \frac{e^x}{x} u = -\frac{1}{x} + c_1$$

$$\Rightarrow u = -e^{-x} + x e^{-x} c_1$$ olur.

$$y' = u \Rightarrow y' = -e^{-x} + x e^{-x} c_1$$

$$\Rightarrow y = \int (-e^{-x} + x e^{-x} c_1) dx + c_2$$

$$\Rightarrow y = e^{-x} - c_1 (x+1) e^{-x} + c_2$$

istenen genel çözümdür.

Örnek! $(x^2+1)y'' - 2xy' + 2y = 0$ denkleminin bir çözümü $y_1 = x$ ise genel çözümünü bulunuz.

Denklemde y var olduğundan mertebe düşürebilmek için homojen kısmın bir özel çözümüne ihtiyaç vardır.

$y_1 = x$ için

$y = x.u$ dönüşümü ile $y' = u + xu'$, $y'' = 2u' + xu''$ için

$$(x^2+1)(2u' + xu'') - 2x(u + xu') + 2ux = 0$$

$$\Rightarrow x(x^2+1)u'' + 2u' = 0$$

elde edilir. Burada denklemde u olmadığı için

$u' = v$ denirse $u'' = v'$ olacağından denklem

$$x(x^2+1)v' + 2v = 0 \Rightarrow x(x^2+1)\frac{dv}{dx} = -2v$$

$$\Rightarrow \frac{dv}{v} = -\frac{2}{x(x^2+1)}dx$$

değişkenlerine ayrılabilen denkleme indirgenir. Buradan

$$\frac{dv}{v} = \left(-\frac{2}{x} + \frac{2x}{x^2+1}\right)dx$$

$$\Rightarrow \ln v = -2\ln x + \ln(x^2+1) + \ln c_1 \Rightarrow v = x^{-2}(x^2+1)c_1 \text{ dır.}$$

$$u' = v \Rightarrow u' = x^{-2}(x^2+1)c_1 \Rightarrow u = \int \frac{x^2+1}{x^2} c_1\, dx + c_2$$

$$\Rightarrow u = c_1\left(x - \frac{1}{x}\right) + c_2$$

bulunur

$$y = xu \Rightarrow y = x\left(c_1\left(x - \frac{1}{x}\right) + c_2\right)$$

$$\Rightarrow y = c_1(x^2-1) + c_2 x$$

genel çözümü elde edilir.